# 7. Hausübung zur Theoretischen Physik für Lehramt, WS 2010/11

(abzugeben am Freitag, 10.12.2010)

Aufgabe H13 *Kommutator im Heisenberg-Bild* (4 Punkte)

$X(t)$ sei der Ortsoperator eines freien Teilchens in einer Dimension im Heisenberg-Bild. Bestimmen Sie $\big[X(t), X(0)\big]$. Gilt zu allen Zeiten die Relation $\big[X(t), P(t)\big] = \mathrm{i}\hbar\mathbb{1}$ ?

*Hinweis*: Für ein freies Teilchen ist $P$ und daher auch $H = P^2/2m$ zeitlich erhalten. Berechnen Sie erst $X(t)$ explizit mit Hilfe von $U(t) = \exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht)$ und verwenden Sie $[X, f(P)] = \mathrm{i}\hbar f'(P)$.

Aufgabe H14 *Quantisierung im Phasenraum* (6 Punkte)

Jeder Funktion $f(q,p)$ im klassischen Phasenraum lässt sich im Zustandsraum eindeutig ein Operator $F$ zuordnen durch die sogenannte Weyl-Ordnungs-Vorschrift

$$F \;=\; \text{symmetrische Ordnung von } f(q\to Q, p\to P) \qquad \text{mit} \quad [Q,P] = \mathrm{i}\hbar\mathbb{1}\ ; \tag{1}$$

z.B. wird $f = q^2p$ zu $F = \frac{1}{3}(Q^2P + QPQ + PQ^2)$. Die (ebenfalls eindeutige) Umkehrung liefert für jeden Operator $G$ (als Funktion der Operatoren $Q$ und $P$) eine Phasenraum-Funktion

$$g_\hbar(q,p) \;=\; G_\star(Q\to q, P\to p)\ , \tag{2}$$

wobei die Funktion $G_\star(q,p)$ aus der Funktion $G(q,p)$ dadurch entsteht, dass Produkte aus $q$ und $p$ mit dem neuen (nichtkommutativen Stern-)Produkt

$$q\star q \;=\; q^2\ , \qquad q\star p \;=\; qp + \tfrac{\mathrm{i}\hbar}{2}\ , \qquad p\star q \;=\; pq - \tfrac{\mathrm{i}\hbar}{2}\ , \qquad p\star p \;=\; p^2 \tag{3}$$

zu bilden sind. Seine assoziative Erweiterung auf beliebige Funktionen lautet

$$\big(f\star g\big)(q,p) \;=\; f(q,p)\ \exp\Big\{\tfrac{\mathrm{i}\hbar}{2}\,(\overleftarrow{\partial}_q\overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p\overrightarrow{\partial}_q)\Big\}\ g(q,p)\ . \tag{4}$$

An die Abhängigkeit von $\hbar$ erinnert in (2) die Notation $g_\hbar$.

(a) Entwickeln Sie das Stern-Produkt bis zur Ordnung $\hbar^2$.

(b) Verifizieren Sie mit (4) oder dem Ergebnis zu (a) die Produkte in (3).

(c) Prüfen Sie am Beispiel $f = q^2p$, ob (2) tatsächlich die Umkehrung von (1) ist, d.h. ob die $\hbar$-Abhängigkeit herausfällt in $f \to F \to f_\hbar{=}f$.

(d) Welches ist die zum Hamilton-Operator $H = \frac{P^2}{2m} + V(Q)$ gehörige Phasenraum-Funktion $h_\hbar(q,p)$? Gilt $h_\hbar = h \equiv \frac{p^2}{2m} + V(q)$ ?

(e) Bilden Sie für eine Observable $F$ die Heisenbergsche Bewegungsgleichung

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F \;=\; \tfrac{1}{\mathrm{i}\hbar}\,[F,H] \qquad\qquad (\partial_t F = 0)$$

via (2) auf den Phasenraum ab. Wie lautet der klassische Beitrag ($\hbar\to 0$), wie die führende Quantenkorrektur, falls $H = \frac{P^2}{2m} + V(Q)$ und $f_\hbar = f$ ?

(f) Können Sie die Lösung $f_\hbar(t)$ mit einer „Zeitentwicklungsfunktion“ angeben?